

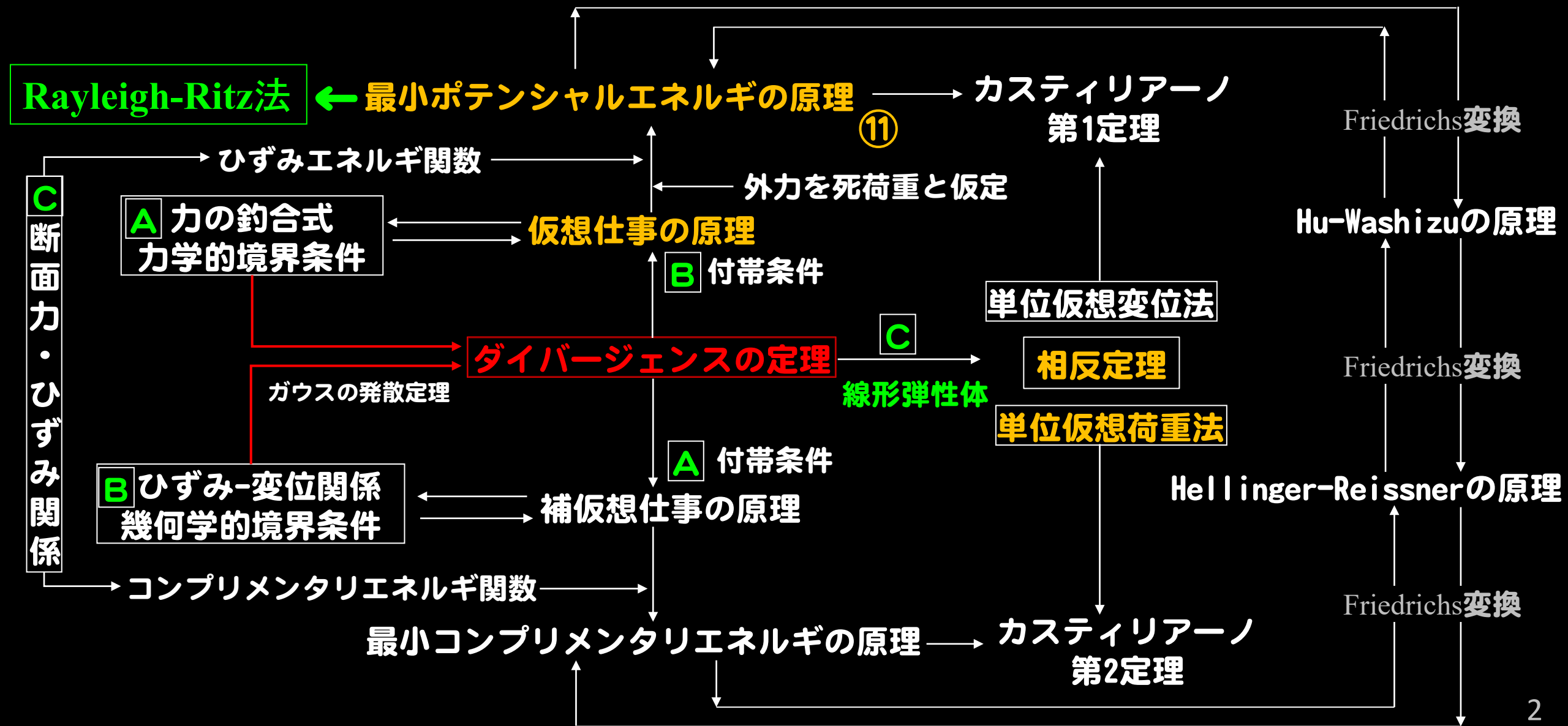
仮想仕事の原理



⑭ 近似解法 例題

城戸將江・津田恵吾 2021.07

仕事の原理・エネルギー原理の全体像



最小ポテンシャルエネルギーの原理に基礎をおく近似解法1

釣合問題

Rayleigh-Ritz法

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0$$

最小ポテンシャル
エネルギーの原理

$$\text{全ポテンシャルエネルギー} \\ \Pi(a_i) = U(a_i) + V(a_i)$$

一般化座標 a_i

$f_i(x)$: 基底

$$v(x) = \sum_{i=1}^n a_i f_i(x)$$

たわみの仮定

$$v(x) = \sum_{i=1}^n a_i f_i(x)$$

$$\Rightarrow v'(x) = \sum_{i=1}^n a_i f_i'(x), \quad v''(x) = \sum_{i=1}^n a_i f_i''(x)$$

ひずみエネルギー

$$U = \int_l \frac{EI v''^2}{2} dx = \int_l \frac{EI}{2} \left(\sum_{i=1}^n a_i f_i''(x) \right)^2 dx$$

外力のポテンシャル

$$\left\{ \begin{array}{l} {}_P V_j = -P_j \cdot v(x_j) = -P_j \cdot \sum_{i=1}^n a_i f_i(x_j) \\ {}_M V_k = -\bar{M}_k \cdot v'(x_k) = -\bar{M}_k \cdot \sum_{i=1}^n a_i f_i'(x_k) \\ {}_w V = -\int_l w(x) \cdot v(x) dx = -\int_l w(x) \cdot \sum_{i=1}^n a_i f_i(x) dx \end{array} \right.$$

全ポテンシャルエネルギー

$$\Pi = U + V = U + \sum_j {}_P V_j + \sum_k {}_M V_k + {}_w V$$

最小ポテンシャルエネルギーの原理に基礎をおく近似解法2

釣合問題

全ポテンシャルエネルギー

$$\begin{aligned}\Pi(a_1, a_2, \dots, a_n) &= U + V = U + \sum_j P V_j + \sum_k M V_k + w V \\ &= \int_l \frac{EI}{2} \left(\sum_{i=1}^n a_i f_i''(x) \right)^2 dx - \sum_j \left(P_j \cdot \sum_{i=1}^n a_i f_i(x_j) \right) - \sum_k \left(\bar{M}_k \cdot \sum_{i=1}^n a_i f_i'(x_k) \right) - \int_l w(x) \cdot \sum_{i=1}^n a_i f_i(x) dx\end{aligned}$$

全ポテンシャルエネルギー $\Pi(a_1, a_2, \dots, a_n)$ の最小条件

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} &= \int_l EI \left(\sum_{i=1}^n a_i f_i''(x) \right) f_i''(x) dx - \sum_j P_j \cdot f_i(x_j) - \sum_k \bar{M}_k \cdot f_i'(x_k) - \int_l w(x) \cdot f_i(x) dx = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \\ &= \sum_{m=1}^n \left\{ EI \int_l f_m''(x) f_i''(x) dx \right\} \cdot a_m - \sum_j P_j \cdot f_i(x_j) - \sum_k \bar{M}_k \cdot f_i'(x_k) - \int_l w(x) \cdot f_i(x) dx = 0\end{aligned}$$

上式をより具体的にマトリックス形式で記述する。

最小ポテンシャルエネルギーの原理に基礎をおく近似解法3

全ポテンシャルエネルギー $\Pi(a_1, a_2, \dots, a_n)$ の最小条件

釣合問題

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = \sum_{m=1}^n \left\{ EI \int_l f_m''(x) f_i''(x) dx \right\} \cdot a_m - \sum_j P_j \cdot f_i(x_j) - \sum_k \bar{M}_k \cdot f_i'(x_k) - \int_l w(x) \cdot f_i(x) dx = 0$$

($i = 1, 2, \dots, n$)

上式をより具体的にマトリックス形式で記述する。

$$EI \begin{pmatrix} \int_0^l f_1'' f_1'' dx & \int_0^l f_2'' f_1'' dx & \int_0^l f_3'' f_1'' dx & \dots & \int_0^l f_n'' f_1'' dx \\ \int_0^l f_1'' f_2'' dx & \int_0^l f_2'' f_2'' dx & \int_0^l f_3'' f_2'' dx & \dots & \int_0^l f_n'' f_2'' dx \\ \int_0^l f_1'' f_3'' dx & \int_0^l f_2'' f_3'' dx & \int_0^l f_3'' f_3'' dx & \dots & \int_0^l f_n'' f_3'' dx \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_0^l f_1'' f_n'' dx & \int_0^l f_2'' f_n'' dx & \int_0^l f_3'' f_n'' dx & \dots & \int_0^l f_n'' f_n'' dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_j P_j f_1(x_j) + \sum_k \bar{M}_k \cdot f_1'(x_k) + \int_0^l w(x) \cdot f_1(x) dx \\ \sum_j P_j f_2(x_j) + \sum_k \bar{M}_k \cdot f_2'(x_k) + \int_0^l w(x) \cdot f_2(x) dx \\ \sum_j P_j f_3(x_j) + \sum_k \bar{M}_k \cdot f_3'(x_k) + \int_0^l w(x) \cdot f_3(x) dx \\ \dots \\ \sum_j P_j f_n(x_j) + \sum_k \bar{M}_k \cdot f_n'(x_k) + \int_0^l w(x) \cdot f_n(x) dx \end{pmatrix}$$

上式をより一般化座標 a_1, a_2, \dots, a_n を求めれば、たわみを決定できる。

最小ポテンシャルエネルギーの原理に基礎をおく近似解法4

固有値問題

軸力 P の曲がる時のポテンシャルエネルギーは下式である (⑫最小P.E.の原理の例題参照)

$${}_{AxialP}V = -P \frac{1}{2} \int_0^l v'(x)^2 dx \quad \Rightarrow \quad {}_{AxialP}V = -P \frac{1}{2} \int_0^l \left(\sum_{i=1}^n a_i f_i'(x) \right)^2 dx$$

上式を a_i で偏微分すると次式となる. $\frac{\partial {}_{AxialP}V}{\partial a_i} = -P \int_0^l \left(\sum_{i=1}^n a_i f_i'(x) \right) f_i'(x) dx \quad (i=1,2,\dots,n)$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial {}_{AxialP}V}{\partial a_1} \\ \frac{\partial {}_{AxialP}V}{\partial a_2} \\ \frac{\partial {}_{AxialP}V}{\partial a_3} \\ \dots \\ \frac{\partial {}_{AxialP}V}{\partial a_n} \end{pmatrix} = -P \begin{pmatrix} \int_0^l f_1' f_1' dx & \int_0^l f_2' f_1' dx & \int_0^l f_3' f_1' dx & \dots & \int_0^l f_n' f_1' dx \\ \int_0^l f_1' f_2' dx & \int_0^l f_2' f_2' dx & \int_0^l f_3' f_2' dx & \dots & \int_0^l f_n' f_2' dx \\ \int_0^l f_1' f_3' dx & \int_0^l f_2' f_3' dx & \int_0^l f_3' f_3' dx & \dots & \int_0^l f_n' f_3' dx \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_0^l f_1' f_n' dx & \int_0^l f_2' f_n' dx & \int_0^l f_3' f_n' dx & \dots & \int_0^l f_n' f_n' dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$$

最小ポテンシャルエネルギーの原理に基礎をおく近似解法5

固有値問題

全ポテンシャルエネルギー Π が下式となる時、

$$\Pi = U + V = \int_l \frac{EIv''^2}{2} dx - \frac{P}{2} \int_l v'^2 dx$$

Π の最小条件は下式となる。

$$EI \begin{pmatrix} \int_0^l f_1'' f_1'' dx & \int_0^l f_2'' f_1'' dx & \int_0^l f_3'' f_1'' dx & \dots & \int_0^l f_n'' f_1'' dx \\ \int_0^l f_1'' f_2'' dx & \int_0^l f_2'' f_2'' dx & \int_0^l f_3'' f_2'' dx & \dots & \int_0^l f_n'' f_2'' dx \\ \int_0^l f_1'' f_3'' dx & \int_0^l f_2'' f_3'' dx & \int_0^l f_3'' f_3'' dx & \dots & \int_0^l f_n'' f_3'' dx \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_0^l f_1'' f_n'' dx & \int_0^l f_2'' f_n'' dx & \int_0^l f_3'' f_n'' dx & \dots & \int_0^l f_n'' f_n'' dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} - P \begin{pmatrix} \int_0^l f_1' f_1' dx & \int_0^l f_2' f_1' dx & \int_0^l f_3' f_1' dx & \dots & \int_0^l f_n' f_1' dx \\ \int_0^l f_1' f_2' dx & \int_0^l f_2' f_2' dx & \int_0^l f_3' f_2' dx & \dots & \int_0^l f_n' f_2' dx \\ \int_0^l f_1' f_3' dx & \int_0^l f_2' f_3' dx & \int_0^l f_3' f_3' dx & \dots & \int_0^l f_n' f_3' dx \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_0^l f_1' f_n' dx & \int_0^l f_2' f_n' dx & \int_0^l f_3' f_n' dx & \dots & \int_0^l f_n' f_n' dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = 0$$

最小ポテンシャルエネルギーの原理に基礎をおく近似解法6

整理すると下式となる。

固有値問題

$$\begin{pmatrix} EI \int_0^l f_1'' f_1'' dx - P \int_0^l f_1' f_1' dx & EI \int_0^l f_2'' f_1'' dx - P \int_0^l f_2' f_1' dx & EI \int_0^l f_3'' f_1'' dx - P \int_0^l f_3' f_1' dx & \dots & EI \int_0^l f_n'' f_1'' dx - P \int_0^l f_n' f_1' dx \\ EI \int_0^l f_1'' f_2'' dx - P \int_0^l f_1' f_2' dx & EI \int_0^l f_2'' f_2'' dx - P \int_0^l f_2' f_2' dx & EI \int_0^l f_3'' f_2'' dx - P \int_0^l f_3' f_2' dx & \dots & EI \int_0^l f_n'' f_2'' dx - P \int_0^l f_n' f_2' dx \\ EI \int_0^l f_1'' f_3'' dx - P \int_0^l f_1' f_3' dx & EI \int_0^l f_2'' f_3'' dx - P \int_0^l f_2' f_3' dx & EI \int_0^l f_3'' f_3'' dx - P \int_0^l f_3' f_3' dx & \dots & EI \int_0^l f_n'' f_3'' dx - P \int_0^l f_n' f_3' dx \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ EI \int_0^l f_1'' f_n'' dx - P \int_0^l f_1' f_n' dx & EI \int_0^l f_2'' f_n'' dx - P \int_0^l f_2' f_n' dx & EI \int_0^l f_3'' f_n'' dx - P \int_0^l f_3' f_n' dx & \dots & EI \int_0^l f_n'' f_n'' dx - P \int_0^l f_n' f_n' dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

上式は、 $a_1=a_2=\dots=a_n=0$ を満足するが、この時 $\nu \equiv 0$ となり、**自明の解**と呼ばれる。意味を持つのは、上式左辺の行列の**行列式が0**となる時である。すなわち、下式である。

$$\begin{vmatrix} EI \int_0^l f_1'' f_1'' dx - P \int_0^l f_1' f_1' dx & EI \int_0^l f_2'' f_1'' dx - P \int_0^l f_2' f_1' dx & EI \int_0^l f_3'' f_1'' dx - P \int_0^l f_3' f_1' dx & \dots & EI \int_0^l f_n'' f_1'' dx - P \int_0^l f_n' f_1' dx \\ EI \int_0^l f_1'' f_2'' dx - P \int_0^l f_1' f_2' dx & EI \int_0^l f_2'' f_2'' dx - P \int_0^l f_2' f_2' dx & EI \int_0^l f_3'' f_2'' dx - P \int_0^l f_3' f_2' dx & \dots & EI \int_0^l f_n'' f_2'' dx - P \int_0^l f_n' f_2' dx \\ EI \int_0^l f_1'' f_3'' dx - P \int_0^l f_1' f_3' dx & EI \int_0^l f_2'' f_3'' dx - P \int_0^l f_2' f_3' dx & EI \int_0^l f_3'' f_3'' dx - P \int_0^l f_3' f_3' dx & \dots & EI \int_0^l f_n'' f_3'' dx - P \int_0^l f_n' f_3' dx \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ EI \int_0^l f_1'' f_n'' dx - P \int_0^l f_1' f_n' dx & EI \int_0^l f_2'' f_n'' dx - P \int_0^l f_2' f_n' dx & EI \int_0^l f_3'' f_n'' dx - P \int_0^l f_3' f_n' dx & \dots & EI \int_0^l f_n'' f_n'' dx - P \int_0^l f_n' f_n' dx \end{vmatrix} = 0$$

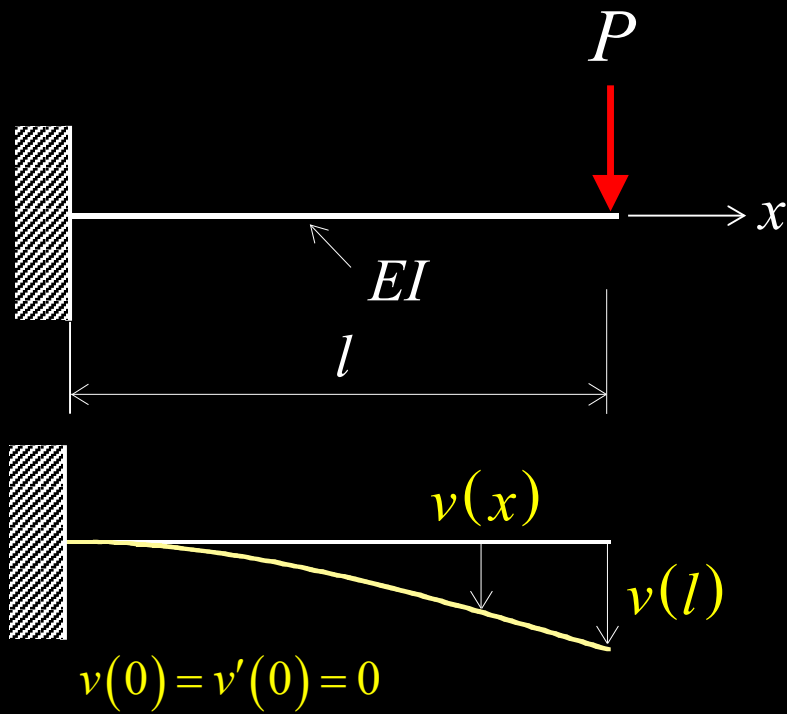
最小ポテンシャルエネルギーの原理に基礎をおく近似解法7

固有値問題

一般的には、この**行列式=0** 満足する時の P を**座屈荷重**という。この時、一般化座標 a_1, a_2, \dots, a_n は求まらなく、その比だけが求まる。これより、たわみ形の形状だけが求まるが、これを**座屈モード**と呼ぶ。このように、座屈荷重と座屈モードを求める問題を**固有値問題**と呼ぶ。

それに対して、一般化座標 a_1, a_2, \dots, a_n が求まる問題は、**釣合問題**と呼ばれる。

例題1



$$v(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) \equiv a_1 x^2 + a_2 x^3$$

$$f_1''(x) = 2, \quad f_2''(x) = 6x, \quad f_1(l) = l^2, \quad f_2(l) = l^3$$

$$EI \begin{pmatrix} \int_0^l f_1'' f_1'' dx & \int_0^l f_2'' f_1'' dx \\ \int_0^l f_1'' f_2'' dx & \int_0^l f_2'' f_2'' dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Pl^2 \\ Pl^3 \end{pmatrix}$$

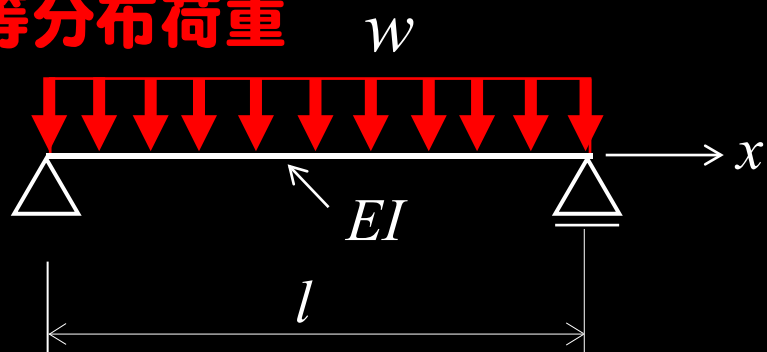
$$\int_0^l f_1'' f_1'' dx = \int_0^l 2 \cdot 2 dx = 4l, \quad \int_0^l f_2'' f_1'' dx = \int_0^l 6x \cdot 2 dx = 6l^2, \quad \int_0^l f_2'' f_2'' dx = \int_0^l 6x \cdot 6x dx = 12l^3$$

$$EI \begin{pmatrix} 4l & 6l^2 \\ 6l^2 & 12l^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Pl^2 \\ Pl^3 \end{pmatrix}$$

これは⑬近似解法のスライド12と同じ式である。

例題2 (つづく)

等分布荷重

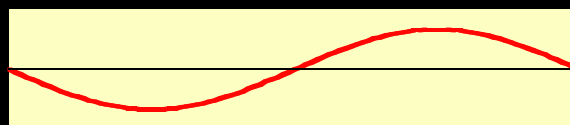


$$v(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) \equiv a_1 \sin \frac{\pi}{l} x + a_2 \sin \frac{3\pi}{l} x$$

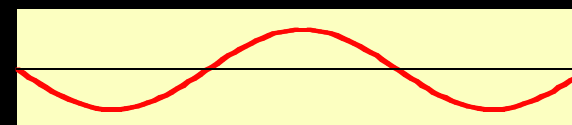
$$f_1''(x) = -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sin \frac{\pi}{l} x, \quad f_2''(x) = -\left(\frac{3\pi}{l}\right)^2 \sin \frac{3\pi}{l} x$$



$$\sin \frac{\pi}{l} x$$



$$\sin \frac{2\pi}{l} x$$



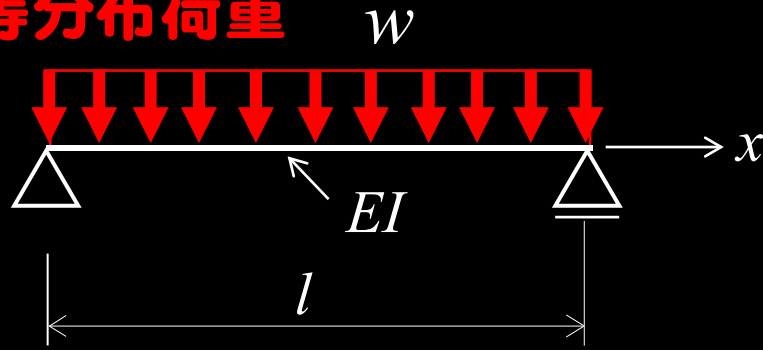
$$\sin \frac{3\pi}{l} x$$

$$\begin{cases} \int_0^l f_1'' f_1'' dx = \int_0^l \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sin \frac{\pi}{l} x \cdot \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sin \frac{\pi}{l} x = \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \cdot \frac{l}{2} \\ \int_0^l f_2'' f_1'' dx = \int_0^l \left(\frac{3\pi}{l}\right)^2 \sin \frac{3\pi}{l} x \cdot \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sin \frac{\pi}{l} x = 0 \\ \int_0^l f_2'' f_2'' dx = \int_0^l \left(\frac{3\pi}{l}\right)^2 \sin \frac{3\pi}{l} x \cdot \left(\frac{3\pi}{l}\right)^2 \sin \frac{3\pi}{l} x = \left(\frac{3\pi}{l}\right)^4 \cdot \frac{l}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int_0^l w \cdot f_1 dx = \int_0^l w \cdot \sin \frac{\pi}{l} x = \frac{2l}{\pi} \cdot w \\ \int_0^l w \cdot f_2 dx = \int_0^l w \cdot \sin \frac{3\pi}{l} x = \frac{2l}{3\pi} \cdot w \end{cases}$$

例題2 (つづき, つづく)

等分布荷重



$$EI \begin{pmatrix} \int_0^l f_1'' f_1'' dx & \int_0^l f_2'' f_1'' dx \\ \int_0^l f_1'' f_2'' dx & \int_0^l f_2'' f_2'' dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^l w \cdot f_1 dx \\ \int_0^l w \cdot f_2 dx \end{pmatrix}$$

$$EI \begin{pmatrix} \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \cdot \frac{l}{2} & 0 \\ 0 & \left(\frac{3\pi}{l}\right)^4 \cdot \frac{l}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2l}{\pi} \cdot w \\ \frac{2l}{3\pi} \cdot w \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{\pi^5} \cdot \frac{wl^4}{EI} \\ \frac{4}{3^5 \pi^5} \cdot \frac{wl^4}{EI} \end{pmatrix}$$

たわみは下式となる。

$$v(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) = \left(\frac{4}{\pi^5} \cdot \frac{wl^4}{EI}\right) \sin \frac{\pi}{l} x + \left(\frac{4}{3^5 \pi^5} \cdot \frac{wl^4}{EI}\right) \sin \frac{3\pi}{l} x$$

$$\frac{1}{3^5} = 0.0041$$

例題2 (つづき)

$$v(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) \equiv \left(\frac{4}{\pi^5} \cdot \frac{wl^4}{EI} \right) \sin \frac{\pi}{l} x + \left(\frac{4}{3^5 \pi^5} \cdot \frac{wl^4}{EI} \right) \sin \frac{3\pi}{l} x$$

材中央のたわみ $v\left(\frac{l}{2}\right) = a_1 f_1\left(\frac{l}{2}\right) + a_2 f_2\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{4}{\pi^5} \cdot \frac{wl^4}{EI} - \frac{4}{3^5 \pi^5} \cdot \frac{wl^4}{EI} = 0.013017 \frac{wl^4}{EI}$

$$a_1 f_1\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{4}{\pi^5} \cdot \frac{wl^4}{EI} = 0.013071 \cdot \frac{wl^4}{EI}$$

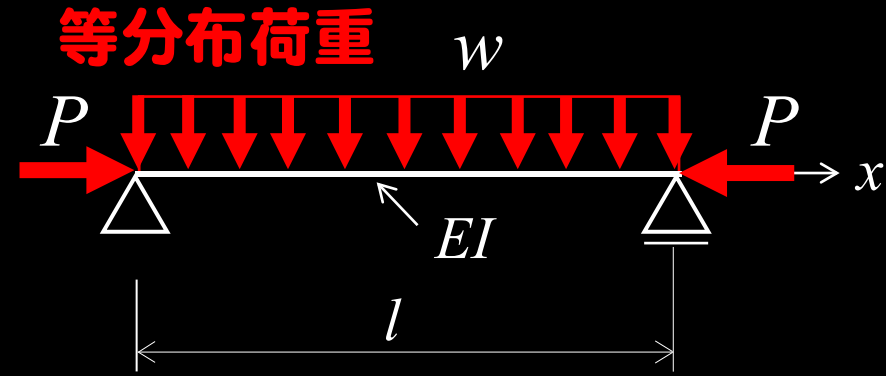
正解のたわみ (②構造力学の構造・例題3)

$$v(x) = \frac{wl^4}{24EI} \left\{ \left(\frac{x}{l}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{x}{l}\right) \right\} \Rightarrow v\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5}{384} \cdot \frac{wl^4}{EI} = 0.013021 \cdot \frac{wl^4}{EI}$$

正解との比較

$$\frac{a_1 f_1\left(\frac{l}{2}\right) + a_2 f_2\left(\frac{l}{2}\right)}{v\left(\frac{l}{2}\right)_{\text{正解}}} = \frac{0.013017}{0.013021} = 0.99969, \quad \frac{a_1 f_1\left(\frac{l}{2}\right)}{v\left(\frac{l}{2}\right)_{\text{正解}}} = \frac{0.013071}{0.013021} = 1.0038$$

例題3



$$v(x) = a_1 f_1(x) \equiv a_1 \sin \frac{\pi}{l} x$$

$$a_1 = \frac{4}{\pi^5} \cdot \frac{wl^4}{EI}$$

$$f_1'(x) = \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi}{l} x, \quad f_1''(x) = -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sin \frac{\pi}{l} x,$$

$$\left(EI \int_0^l f_1'' f_1'' dx - P \int_0^l f_1' f_1' dx \right) \cdot a_1 = \int_0^l w \cdot f_1 dx$$

$$\rightarrow \left(EI \int_0^l \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \sin^2 \frac{\pi}{l} x dx - P \int_0^l \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cos^2 \frac{\pi}{l} x dx \right) \cdot a_1 = \int_0^l w \cdot \sin \frac{\pi}{l} x dx$$

$$\rightarrow \left(EI \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \frac{l}{2} - P \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \frac{l}{2} \right) \cdot a_1 = \frac{2l}{\pi} w$$

$$\rightarrow a_1 = \frac{1}{1 - \frac{P}{\pi^2 EI}} \cdot \frac{4}{\pi^5} \cdot \frac{wl^4}{EI} = \frac{1}{1 - \frac{P}{P_e}} \cdot \frac{4}{\pi^5} \cdot \frac{wl^4}{EI}$$

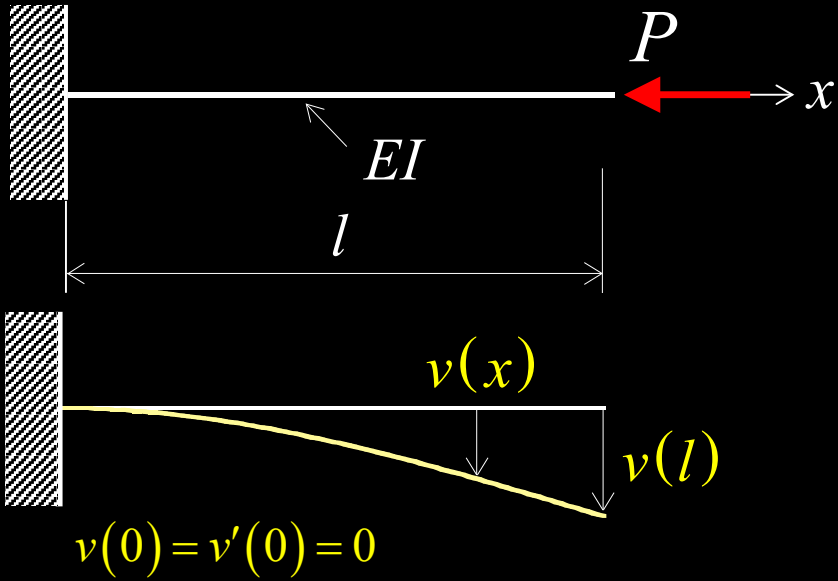
オイラー荷重

$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

拡大係数
(増幅係数)

$$a_m = \frac{1}{1 - \frac{P}{P_e}}$$

例題4 (つづく)



$$v(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) \equiv a_1 x^2 + a_2 x^3$$

$$f_1'(x) = 2x, \quad f_2'(x) = 3x^2, \quad f_1''(x) = 2, \quad f_2''(x) = 6x$$

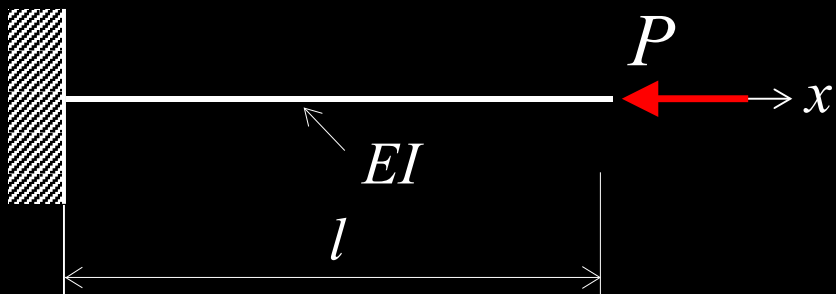
$$\begin{cases} \int_0^l f_1' f_1' dx = \int_0^l 2x \cdot 2x dx = \frac{4}{3} l^3 & \int_0^l f_1'' f_1'' dx = \int_0^l 2 \cdot 2 dx = 4l, \\ \int_0^l f_2' f_1' dx = \int_0^l 3x^2 \cdot 2x dx = \frac{3}{2} l^4 & \int_0^l f_2'' f_1'' dx = \int_0^l 6x \cdot 2 dx = 6l^2 \\ \int_0^l f_2' f_2' dx = \int_0^l 3x^2 \cdot 3x^2 dx = \frac{9}{5} l^5 & \int_0^l f_2'' f_2'' dx = \int_0^l 6x \cdot 6x dx = 12l^3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} EI \int_0^l f_1'' f_1'' dx - P \int_0^l f_1' f_1' dx & EI \int_0^l f_2'' f_1'' dx - P \int_0^l f_2' f_1' dx \\ EI \int_0^l f_1'' f_2'' dx - P \int_0^l f_1' f_2' dx & EI \int_0^l f_2'' f_2'' dx - P \int_0^l f_2' f_2' dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

座屈条件式

$$\begin{vmatrix} 4EI l - \frac{4}{3} P l^3 & 6EI l^2 - \frac{3}{2} P l^4 \\ 6EI l^2 - \frac{3}{2} P l^4 & 12EI l^3 - \frac{9}{5} P l^5 \end{vmatrix} = 0$$

例題4 (つづき, つづく)



$$\begin{vmatrix} 4EI l - \frac{4}{3}Pl^3 & 6EI l^2 - \frac{3}{2}Pl^4 \\ 6EI l^2 - \frac{3}{2}Pl^4 & 12EI l^3 - \frac{9}{5}Pl^5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\longrightarrow \left(4EI l - \frac{4}{3}Pl^3\right) \left(12EI l^3 - \frac{9}{5}Pl^5\right) - \left(6EI l^2 - \frac{3}{2}Pl^4\right)^2 = 0$$

$$\longrightarrow P = \frac{52 \pm 8\sqrt{31}}{3} \cdot \frac{EI}{l^2} = \left(\frac{2.4860}{32.181}\right) \cdot \frac{EI}{l^2}$$

座屈モード

$$v(x) = v(l) \left(1 - \cos \frac{\pi}{2l} x\right)$$

偶関数: $f(x) = f(-x)$

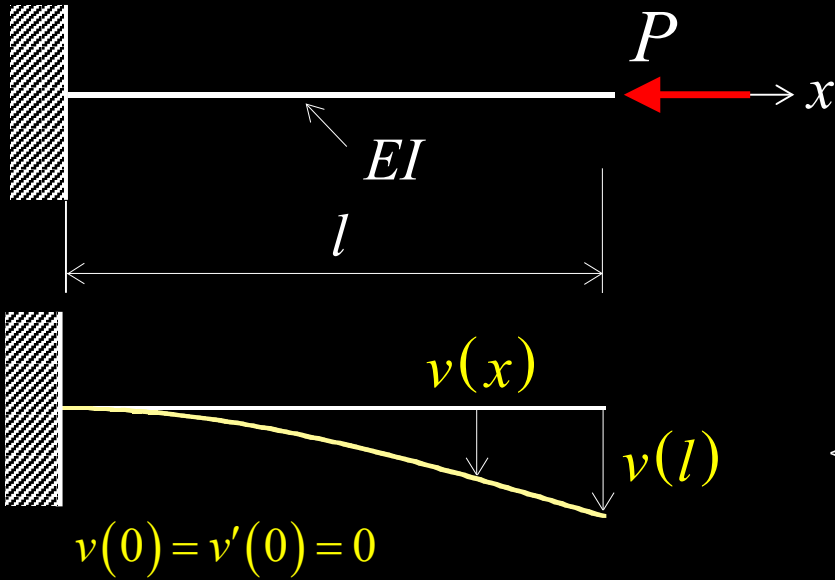
正解

$$P_e = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{EI}{l^2} = 2.4674 \cdot \frac{EI}{l^2}$$

正解との比較

$$\frac{P}{P_e} = \frac{2.4860}{2.4674} = 1.0075$$

例題4 (つづき)



$$v(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) \equiv a_1 x^2 + a_2 x^4$$

$$f_1'(x) = 2x, \quad f_2'(x) = 4x^3, \quad f_1''(x) = 2, \quad f_2''(x) = 12x^2$$

$$\begin{cases} \int_0^l f_1' f_1' dx = \int_0^l 2x \cdot 2x dx = \frac{4}{3} l^3 & \int_0^l f_1'' f_1'' dx = \int_0^l 2 \cdot 2 dx = 4l, \\ \int_0^l f_2' f_1' dx = \int_0^l 4x^3 \cdot 2x dx = \frac{8}{5} l^5 & \int_0^l f_2'' f_1'' dx = \int_0^l 12x^2 \cdot 2 dx = 8l^3 \\ \int_0^l f_2' f_2' dx = \int_0^l 4x^3 \cdot 4x^3 dx = \frac{16}{7} l^7 & \int_0^l f_2'' f_2'' dx = \int_0^l 12x^2 \cdot 12x^2 dx = \frac{144}{5} l^5 \end{cases}$$

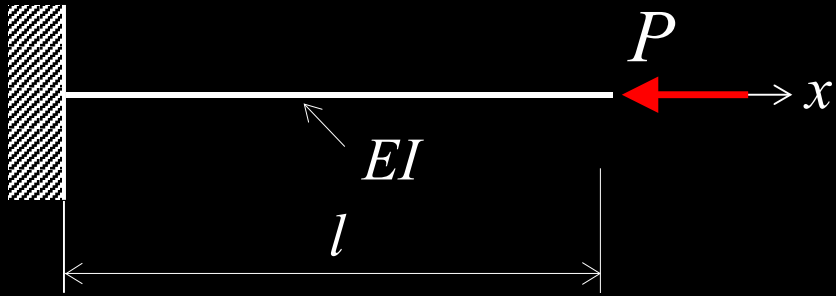
$$\begin{pmatrix} EI \int_0^l f_1'' f_1'' dx - P \int_0^l f_1' f_1' dx & EI \int_0^l f_2'' f_1'' dx - P \int_0^l f_2' f_1' dx \\ EI \int_0^l f_1'' f_2'' dx - P \int_0^l f_1' f_2' dx & EI \int_0^l f_2'' f_2'' dx - P \int_0^l f_2' f_2' dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

座屈条件式

$$\begin{vmatrix} 4EI l - \frac{4}{3} P l^3 & 8EI l^3 - \frac{8}{5} P l^5 \\ 8EI l^3 - \frac{8}{5} P l^5 & \frac{144}{5} EI l^5 - \frac{16}{7} P l^7 \end{vmatrix} = 0$$

例題4 (つづき)

固有値問題



座屈条件式

$$\begin{vmatrix} 4EI l - \frac{4}{3}Pl^3 & 8EI l^3 - \frac{8}{5}Pl^5 \\ 8EI l^3 - \frac{8}{5}Pl^5 & \frac{144}{5}EI l^5 - \frac{16}{7}Pl^7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\rightarrow \left(4EI l - \frac{4}{3}Pl^3\right) \left(\frac{144}{5}EI l^5 - \frac{16}{7}Pl^7\right) - \left(8EI l^3 - \frac{8}{5}Pl^5\right)^2 = 0$$

$$\rightarrow P = \frac{105}{8} \left(\frac{12}{7} \pm \sqrt{\frac{1712}{735}} \right) \cdot \frac{EI}{l^2} = \left(\frac{2.4688}{45.531} \right) \cdot \frac{EI}{l^2}$$

正解 $P_e = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{EI}{l^2} = 2.4674 \cdot \frac{EI}{l^2}$

正解との比較 $\frac{P}{P_e} = \frac{2.4688}{2.4674} = 1.00057$

まとめ

- 1) **Rayleigh-Ritz法** (レイリー・リッツ法) の解説を行った。
- 2) 例題1：片持ち梁に集中荷重が作用する場合
- 3) 例題2：単純ばりに等分布荷重が作用する場合
- 4) 例題3：単純ばりに圧縮力と等分布荷重が作用する場合
- 5) 例題4：片持ち梁に圧縮力が作用するときの座屈荷重

次の解説について

- ⑮ 仮想仕事の原理とエネルギー原理のまとめを解説します。

質問・要望・意見

よりわかりやすく，役に立つ内容にしたいと考えています。

質問，要望，意見などを，どうぞ宜しくお願い致します。

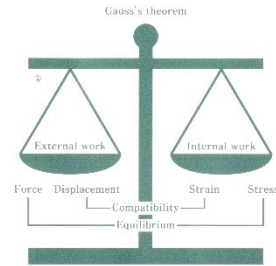
質問等の送付先は，ホームページに示しています。

仮想仕事の原理とエネルギー原理 トラス, 梁, 骨組

鹿島出版会 2019年9月

仮想仕事の 原理と エネルギー原理

トラス, 梁, 骨組



Keiyo ISUDA Masae KIDO
津田恵吾 / 城戸将江 (共著)

Virtual work and energy principles
for trusses, beams and frames

鹿島出版会

ISBN978-4-306-03388-7
C3052 ¥3500E

鹿島出版会

定価(本体3,500円+税)

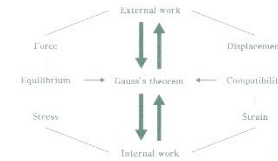


9784306033887



1923052035006

仮想仕事の
原理と
エネルギー原理
トラス, 梁, 骨組



Virtual work and energy principles for trusses, beams and frames